Jacob Nøtthellen

En personlig og assosiativ LÆREBOK i fysikk og matematikk

Myntet på $\vec{\text{O}}$lavs old boys

Forord med presentasjon av forfatteren

Kjære alle R&B-ere. Jeg skrev denne læreboka fordi jeg mente at dere trenger litt faglig påfyll etter så mange år, og noen av leksjonene bærer vel preg av det. Men i ettertid skjønner jeg at jeg egentlig skrev fordi jeg har skyhøye tanker om egne kunnskaper og har et behov for å vise hva jeg kan. Noen av leksjonene bærer nok preg av det også, så her må jeg bare beklage. Men jeg har visst prøvd å kompensere noe ved også å skrive om emner jeg ikke behersker. Noen av leksjonene …

Kunnskaper kommer gjerne fra oppdagelser, og jeg er selv en habil oppdager. Et typisk eksempel er en oppdagelse jeg gjorde på personalkantina på det nye Rikshospitalet. Der solgte de skillingsboller. (I Bergensordboken står skillingsbolle beskrevet som *bolle 'me møkkæ kanél i svingenæ'*.) Jeg oppdaget nemlig at skillingsbollene på kantina alltid var kveilet samme vei, bortsett fra om onsdagene. Da var de snurret motsatt vei.

For å kunne gjøre en slik oppdagelse kreves det unike egenskaper.

- Man bør helst være oppvokst i Bergen og/eller omland og elske bergensk bakverk med mye sukker og kanel.
- Man må være konsekvent og spise skillingsbolle til frokost hver dag og ikke lefle med lefse og slikt.
- Man må være så pass asosial at man ikke menger seg med kolleger eller andre kjenninger på kantina, men finner seg et ledig småbord i et hjørne. Skravling og oppdagelser går ikke i hop når man er dårlig på multitasking.
- Man må være tålmodig og ikke ta snarveier. Det nytter ikke å glefse bollen radielt. Det må gomles yttersvinger hele veien inn.
- Man må være årvåken og konsentrert slik at man legger merke til hvilken vei bollen roterer for hver tugge man tar. Hvis man lar tankene fly, kan bollen fort være oppspist før man får summet seg, og da går man glipp av viktig informasjon.
- Og det hjelper jo litt å være matematisk skolert slik at man ser forskjell på positiv og negativ dreieretning.

Forfatter ferdigpresentert.

JN 2017

Innhold

Leksjon 1
Kvadrupol i taket

Det er lenge siden nå at jeg skrev limericker og sendte inn til Søndagsposten. Denne tror jeg ble framført av André Bjerke:

> *Da herr Knutsen en dag tok en stake*
> *og til enden av den bandt en kake*
> *ble han spurt av sin venn*
> *hva han skulle med den.*
> *Jeg skal mate en grevling i taket.*

På det gamle Rikshospitalet var det et tunnelsystem som gikk under alle bygningene og under bakken mellom bygningene. I parken ble det en sjelden gang observert grevling. P(grevling i taket) > 0 var derfor innen rekkevidde, men grevling ble aldri observert nedenfra på det gamle Rikshospitalet.

Dette handler om et røntgenlaboratorium der hjertepasienter ble undersøkt på 70-tallet. EKG var der absolutt nødvendig. Plutselig en dag var EKG-signalene sterkt forstyrret av 50 Hz støy. Dette oppsto da nye strømførende skinner ble koblet til for å forsyne en del av sykehuset med strøm. I skinnene var strømstyrken 3000 A. Skinnene gikk under gulvet, noen få meter fra hjertelaboratoriet, og altså oppe under taket i tunneletasjen. Strømførende kabler eller skinner omgis av magnetfelt (se leksjon 6) som i sin tur induserer uønsket elektrisk støy i EKG-ledningene.

Jeg tok med måleutstyr for magnetfelt og målte at feltet var mye sterkere enn anbefalt for rom der EKG brukes. Feltet varierte rundt om i rommet og var høyest der det var kortest avstand til de nye strømskinnene. Variasjonen med avstanden var rundt regnet $1/r$. Det fikk meg til å våkne. Magnetfeltet fra én strømførende ledning avtar som $1/r$. Men strømtilførsel skjer jo alltid med to ledninger der strømmen i den ene er faseforskjøvet 180° i forhold til den andre. Det gir et dipolfelt som avtar som $1/r^2$. På hvilken måte kunne strømskinnene være montert slik at feltet avtok som $1/r$?

Vi forflyttet oss en etasje ned og så opp mot taket. Der var det sju parallelle skinner, ikke bare to. De tre til venstre dannet en 3-faset strømtilførsel. Vi kan kalle fasene R, S og T og det vil være 120° faseforskjell mellom hver av dem. Dette har lite å si for magnetfeltet fordi resultanten av R, S og T blir en dipol og magnetfeltet vil avta som $1/r^2$. De tre skinnene til høyre var en speiling av de tre til venstre, altså slik at R lå ytterst på begge sider, deretter S og innerst T. Dermed blir dipolkomponenten eliminert, og vi står igjen med en kvadrupol. Magnetfeltet vil derfor avta som $1/r^3$. De som hadde konstruert dette, kunne tydeligvis sine saker, og jeg kunne konkludere med at det magnetfeltet jeg målte, ikke kunne skyldes 3000 A 3-fase i kvadrupolkonfigurasjon.

Den midterste av de sju strømskinnene var jordledningen. Siden den er alene, vil en strøm i den forårsake et magnetfelt som avtar som $1/r$. Og 10 A ville være nok til å forklare mine målinger. Da jordskinnen ble brutt, forsvant støyen fra EKG-kurvene.

Mange av dere har sikkert lignende erfaringer: å kunne litt fysikk kan man ha glede av i de mest uventede situasjoner. Som for eksempel når man står i en tunnel, kikker opp og får øye på en kvadrupol i taket.

Leksjon 2
Svevning og menstruasjon

Alle er vel fortrolig med begrepene i overskriften, men for sikkerhets skyld har jeg funnet fram definisjoner fra Wikipedia.

***Svevning** er et akustisk fenomen som opptrer når to toner med nesten samme frekvens (tonehøyde) klinger samtidig, og høres som en periodisk veksling i lydstyrken.*

***Menstruasjon**, ofte bare kalt mens eller mensen, er en månedlig blødning fra livmoren hos jenter og kvinner i fruktbar alder som ikke er gravide.*

Svevningen oppstår når lydbølgene med de to nesten like frekvensene forsterker eller svekker hverandre, avhengig av om de er i fase eller i motfase. Men hva skjer dersom de to lydbølgene ikke kommer i kontakt med hverandre? Hvis vi bruker hodetelefoner og sender en frekvens til hvert øre, vil vi da høre svevningen?

Svaralternativ 1: Nei. Når ikke lydbølgene fins i samme rom, er det meningsløst å snakke om fase og motfase. Lydbølgene kan derfor ikke forsterke og svekke hverandre.

Svaralternativ 2: Ja. Lydsignalene opptrer bare i andre energiformer i nerve- og hjerneceller, men begrepene fase og motfase er ikke forbeholdt lydbølger og fungerer fortsatt.

Begge svaralternativer er basert på litt for enkle resonnementer som ikke tar hensyn til menstruasjonen.

Dette er undersøkt eksperimentelt ved at forsøkspersoner fikk lyd med litt ulik frekvens i hvert øre. Noen ganger hørte man svevning, noen ganger ikke. Når frekvensen er lav, er det flere som hører svevningen enn om frekvensen er høy. Det er betydelige individuelle variasjoner, men i gjennomsnitt ligger cutoff-frekvensen rundt 600 Hz hos kvinner og 800 Hz hos menn. Kilde: *Jerry V. Tobias, CONSISTENCY OF SEX DIFFERENCES IN BINAURAL-BEAT PERCEPTION, Int. Audiol. 4, 179-182, 1965.*

Det fins altså kjønnsforskjeller hva både svevning og menstruasjon angår, og Tobias har mer.

> *By comparing the women subjects' cutoff frequencies with information regarding the day of the menstrual cycle during which the measurements were made, an interesting result was noted: the highest scores occurred for women who were within two days of the onset of menstrual flow. From that observation, one additional experiment was made in which three women were tested three times per week for approximately six weeks. They showed a rise in cutoff frequency to male levels just at the onset of menstruation, then a decline to their base levels, and finally a smaller peak, although possibly a significant one, about fifteen days later.*

Det burde finnes små elektroniske dingser som kan kobles til øreplugger slik at jentene kan høre om mensen nærmer seg, men jeg har ikke sett slike hverken hos Clas Ohlson eller hos Enklere Liv. Nu for tiden er det vel apper som gjelder.

Leksjon 3
Kvadratiske avvik

Merle Travis hadde en megahit som låtskriver på 50-tallet da Tennessee Ernie Ford sang *Sixteen Tons*. (Det har ikke noe som helst med kvadratiske avvik å gjøre.)

Angjeldende kvadratiske avvik vil jeg sortere R&B-ere i tre katagorier.

Kategori 1: De som skjønner prinsippet for minste kvadraters metode.

Kategori 2: De som i løpet av de siste 40 årene har støtt på minste kvadraters metode og kvadrerer/kvadrerte lystelig uten å ane hvorfor.

Kategori 3: De som aldri kvadrerer avvikene sine fordi de er store nok som de er.

Grunnen til at jeg bringer dette på bane, er at jeg selv befant meg i kategori 2 i mange år før jeg en dag på 90-tallet så lyset og avanserte til kategori 1. Var jeg alene i kategori 2 eller var vi flere? Jeg spurte en del fysikere i nærmiljøet om hvorfor avvikene kvadreres. Bare én kvalifiserte seg for kategori 1. Resten hadde enten ikke peiling eller de hadde misforstått. Jeg fikk høre sludder som at det er fordi de største avvikene skal telle mest. Om jeg hadde spurt de samme fysikerne hvorfor vi beregner middelverdien av n tall ved å summere tallene og dele på n, er jeg sikker på at ingen ville ha svart at det er fordi de største avvikene skal telle mest.

Men de to metodene med middelverdi og minste kvadraters metode er ekvivalente. Vi finner minimum av uttrykket $\sum(x_i - y)^2$ ved å derivere mhp y og sette den deriverte lik 0. Det er slik vi bestemmer y med minste kvadraters metode.

$$-2\sum(x_i - y) = -2\sum x_i + 2ny = 0. \qquad \text{Det gir } y = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}\ .$$

Dette er nyttig å være klar over når man bruker minste kvadraters metode. Man trenger ikke å være spesielt bekymret for de største avvikene. I hvert fall ikke mer enn når man beregner middelverdien og vurderer å bruke medianen i stedet.

Jeg håper det ikke er noen av dere igjen i kategori 2 nå, men at alle er pyntelig fordelt på kategoriene 1 og 3.

Siden dette er grunnleggende kunnskap vi fikk på Gløshaugen, og som alle R&B-ere derfor skulle kunne, er jeg kanskje litt for belærende her, og det kan jo tenkes at jeg har tråkket noen av dere på tærne.

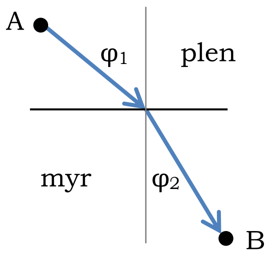
Merle Travis runder av låten sin *That's All* med

> *Now my little song is ended, my little song is through.*
> *And I didn't mean my little song exactly for you.*
> *But if you don't like the way my little song goes,*
> *that's a real good sign I've been trottin' on your toes.*

Men så trår også Merle Travis hardere til enn jeg gjør når han synger *you're an educated fool, and that's all.*

Leksjon 4
Railway & Bicycle

Skal vi gå fra A til B er ikke alltid den korteste veien den raskeste. Hvis vi for eksempel starter i punkt A på en plen og skal til et punkt B i en myr, og marsjfarten på plenen v_{plen} er høyere enn marsjfarten i myra v_{myr}, vil en brutt linje være raskere enn en rett linje fra A til B.



For å finne φ_1 og φ_2 er det bare å slå opp Snells brytningslov, $n_1 \cdot \sin \varphi_1 = n_2 \cdot \sin \varphi_2$. Slik den står gjelder loven for lysbrytning, for eksempel fra luft til vann. Omskrevet for vårt eksempel blir den $\sin \varphi_1 / v_{plen} = \sin \varphi_2 / v_{myr}$.

Når jeg først har valgt en retning fra A, ligger de punktene i myra jeg raskest kan nå på en linje gitt av brytningsformelen, uavhengig av avstanden. Orienteringsløpere med sinuskompetanse må jo ha en kjempefordel.

Det er ikke like lett å skjønne hvorfor fotonene endrer retning. De har jo ingen grunn til å komme seg til B, men er de først på vei fra A i en retning, forsetter de i vannet i den eneste retningen som er den raskeste veien til et eller annet sted. Det er fasinerende at vi og fotonene kan følge samme brytningslov. Tenk over det når du kommer til en myr. Der både kan og bør du gjøre slik et foton ville ha gjort.

Fotoner er helt rå til å komme seg raskt fram. Ikke bare flyr de med lysets hastighet. De har også et ekstra triks som gjør veien kortere. Det er formulert med Lorentzkontraksjonen.

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Med lyshastigheten v = c vil veilengden sett fra fotonet bli lik 0, uansett om den måles i meter eller i lysår. Så det er bare å bøye seg i hatten for fotonene som gidder å skifte retning når de treffer vannoverflaten for å komme enda fortere fram. Og at de greier å skifte retning i den farten! Det må ha noe med lysets bølgenatur å gjøre.

Av hensyn til målgruppen burde jeg vel heller ha pønsket ut et eksempel basert på en reise gjennom Europa med Interrail og veltepetter i stedet for plen og myr.

Men uansett er mine leksjoner bare for lommerusk å regne i forhold til *The Feynman Lectures on Physics*. Så lytt til hva den store mester foreleste i sin tid.

> *Let us imagine that a beautiful girl has fallen out of a boat, and she is screaming for help in the water at point B. We are at a point A on land, and we see the accident, and we can run and can also swim. But we can run faster than we can swim. What do we do?*

Hvis du lurer på hvordan denne dramatiske fortellingen utvikler seg, eller du vil vite mer om Fermats prinsipp, er det bare å google.

Leksjon 5
a,b og c på og x og y av bussen

Jeg satt på bussen hjem fra jobb. På setene foran meg satt to tenåringsjenter. Den ene av dem hadde et problem. Jeg hørte at hun sa til venninna si: x er greit, men a, b og c og alt det der …

Da tenkte jeg at hvis du ikke skjønner hva a, b og c betyr, hva er det da som er så greit med x? Og hva med y? Er den grei eller ugrei? Hva er forskjellen på greie og ugreie bokstaver?

Etter en tid gikk det opp for meg at jenta hadde et poeng: slett ikke alle bokstaver er like greie. Jeg innså at jeg var havnet i den samme grøfta som tenåringsjenta, dog ikke på samme sted, og der ligger jeg visst ennå. Grøfter er temmelig lange, så der er det plass til mange.

Når vi snakker om x og y tenker vi gjerne på et xy-diagram der x er den uavhengige variabelen og y er avhengig av x. Det som gjør dette ugreit for JN, er hvordan vi kan avgjøre hva som er uavhengig, og hva som er avhengig av hva. Når kan vi bytte om x og y, og når kan vi ikke?

Her er tre eksempler for å belyse problemet.

Hvis vi lager en kurve $y = \ln x$, kan vi velge å gå inn via x-aksen og finne y. Men vi kan like gjerne gå inn via y-aksen og finne x. Eller vi kan skrive $x = e^y$og legge x på y-aksen og omvendt eller noe sånt. Vi kan i alle fall bytte om x og y.

I den gammeldagse telefonkatalogen kunne vi slå opp et navn og finne personens telefonnummer. Men vi kunne også ringe opp et tilfeldig nummer fra katalogen og komme i kontakt med vedkommende som var oppført med dette telefonnummeret. Her kan også x og y byttes om.

Rutetabellen for 23-bussen jeg brukte hjem fra jobb hadde en kolonne for navnet på stoppestedene og en kolonne for klokkeslett når bussen stoppet der. Det burde da gå an, tenkte jeg, å gå inn i kolonnen til høyre (den med klokkeslettene) når jeg skulle hjem, i stedet for å bruke kolonnen til venstre (den med stoppestedene). Jeg bestemte meg for å gå av bussen når klokka kombinert med rutetabellen viste at jeg var framme på Lilleaker, men på det tidspunktet sto bussen i kø midt mellom to stoppesteder, og ingen av dem het Lilleaker. Tanken på å be bussjåføren om å sette meg av slo meg, men jeg innså at han neppe ville la seg overtale med x og y som argumenter.

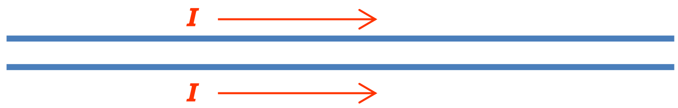
Neste dag stoppet bussen på riktig klokkeslett, og jeg steg av. Men på Lilleaker var jeg ikke. Jeg husker godt hvordan det føltes å traske den lange veien hjemover mens jeg så bussen min forsvinne i det fjerne. Det ble ikke raskeste vei fra A til B den dagen. Jeg skjønte der og da at rutetabeller bare kan leses den ene veien. Grensen for når vi kan bytte om x og y må derfor ligge et sted mellom telefonkataloger og rutetabeller.

Jeg skulle gjerne hatt en matteprat med jenta som hadde problem med a, b og c på bussen. Det er alltid givende å diskutere med folk på samme faglige nivå som en selv. Men hun har nok kommet seg opp av grøfta for lenge siden.

Leksjon 6
Lorentzkontraksjon i sakte fart

Dette var pensum på Gløshaugen, men jeg kjenner noen som ikke fikk det med seg. Og noen andre, formoder jeg, har skrevet på nynorsk i Wikipedia om Lorentz-kontraksjonen: *Effekten vert først viktig i stor fart.* Dette er en særdeles mangelfull oversettelse av tilsvarende setning i den engelske originalartikkelen: *Only at greater speeds, or for electron motion, does it become significant.* De utelot jo det viktigste når de oversatte til nynorsk! Gjenstander i så stor fart at Lorentzkontraksjonen merkes, ser vi aldri. Gjenstander med elektroner i bevegelse har vi rundt oss hele tiden. Denne leksjonen handler om elektroner i bevegelse, og da i sakte fart.

Vi betrakter to parallelle ledere med avstand r der det går en likestøm. Elektronene beveger seg mot venstre i begge lederne.



Hver leder har en ladningstetthet λ = Q/l for protoner og λ = -Q/l for elektroner. Her er følgelig ingen nettoladning og ingen elektriske felter. Elektronene beveger seg med hastigheten v. Det gir strømstyrken I = λ·v. Sett fra elektronene er det protonene som beveger seg med hastigheten –v. På grunn av Lorentzkontraksjonen vil avstanden mellom protonene være bittelitt mindre og avstanden mellom elektronene bittelitt større sett fra elektronsystemet enn sett fra labsystemet.

Ladningstetthetene blir da $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \lambda\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$ og $-\lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\lambda\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$ for henholdsvis protoner og elektroner. Elektronene ser altså en netto ladningstetthet på nabolederen (protontetthet + elektrontetthet) $\lambda\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$. Denne nettoladningen blir elektronene tiltrukket av. Formelen for tiltrekningskraft mellom to parallelle linjeladninger kan utledes fra Coulombs lov, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q_2}{r^2}$. Utledningen utelates her fordi integraler ville være altfor drøy kost. Resultatet blir imidlertid $\frac{F}{l} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

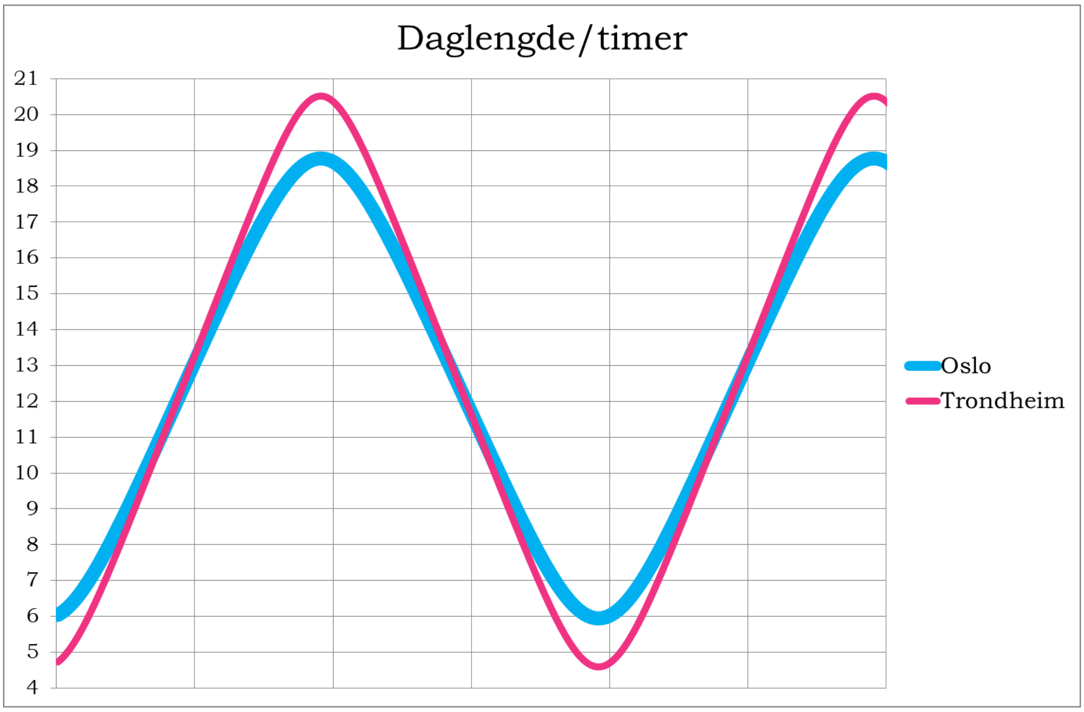
Innsatt ladningstettheten som elektronene ser, blir det til $\frac{F}{l} = \frac{\lambda^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{I^2}{2\pi\varepsilon_0 r c^2}$.

I de fleste fysikkbøker står det at tiltrekningen mellom to strømførende ledere skyldes et magnetfelt: $\frac{F}{l} = B\cdot I = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$. De to formlene for $\frac{F}{l}$ er ekvivalente fordi noen har <u>definert</u> at et magnetfelt $B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ fins, og <u>definert</u> at $\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$.
Men disse definisjonene er ikke nødvendige. Kraften virker bare på elektronene, og den skyldes ikke et magnetfelt, men et elektrisk felt. Og siden elektronene ikke påvirkes av et magnetfelt, så er heller ikke magnetisme et nødvendig begrep for å forklare dette eksperimentet. Det holder med Coulombs lov og Lorentzkontraksjon. Feynman er mer pragmatisk: *Magnetism and electricity are just "two ways of looking at the same thing".* Feynman kan vi stole på, men ikkje Wikipedia på nynorsk.

Leksjon 7
Plagsom annenderiverte om våren

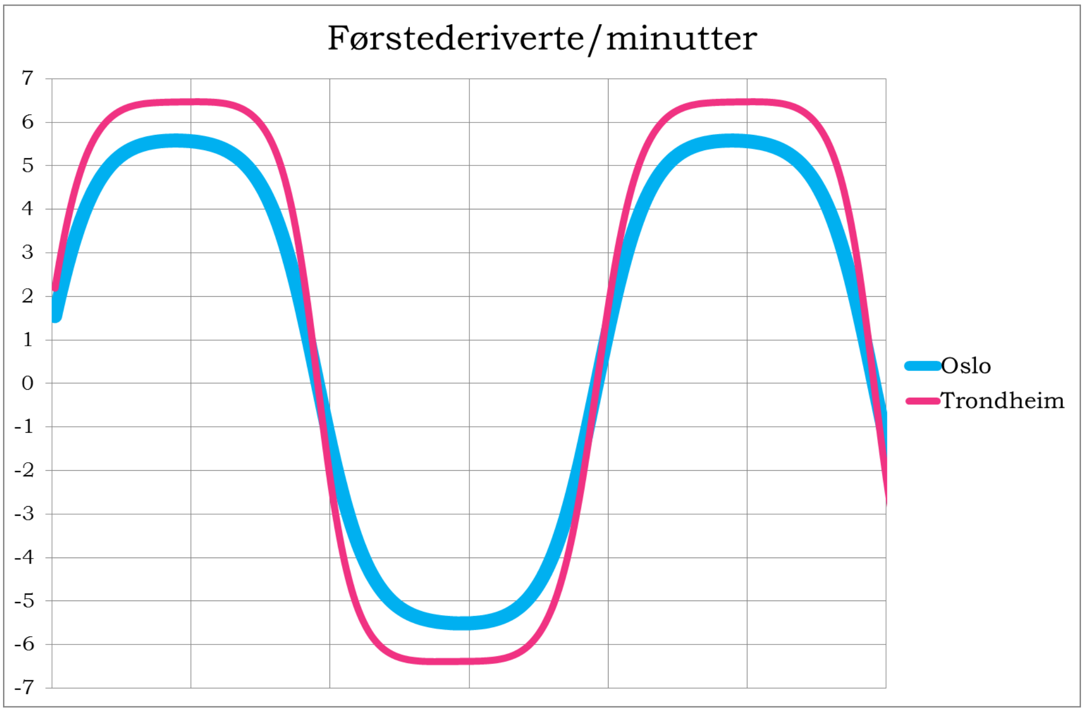
Jeg ser alltid fram til våren med lengre dager, men i mange år levde jeg i den villfarelse at daglengden her i Oslo varierer omtrent som en sinuskurve. Da burde annenderiverte også svinge som en sinuskurve. Det skulle tilsi at daglig inkrement i daglengde øker fram til vårjevndøgn, en økning jeg ventet på hver vår, men som aldri kom. Det var like plagsomt hvert år, og det føltes urettferdig at pollenallergikerne fikk all oppmerksomhet og sympati i media, mens vi annenderivertikere ble ignorert. Til slutt fant jeg ut at det beste ville være å regne litt på det, slik at jeg visste hva jeg hadde i vente neste vår. Kanskje det ville hjelpe litt på humøret.

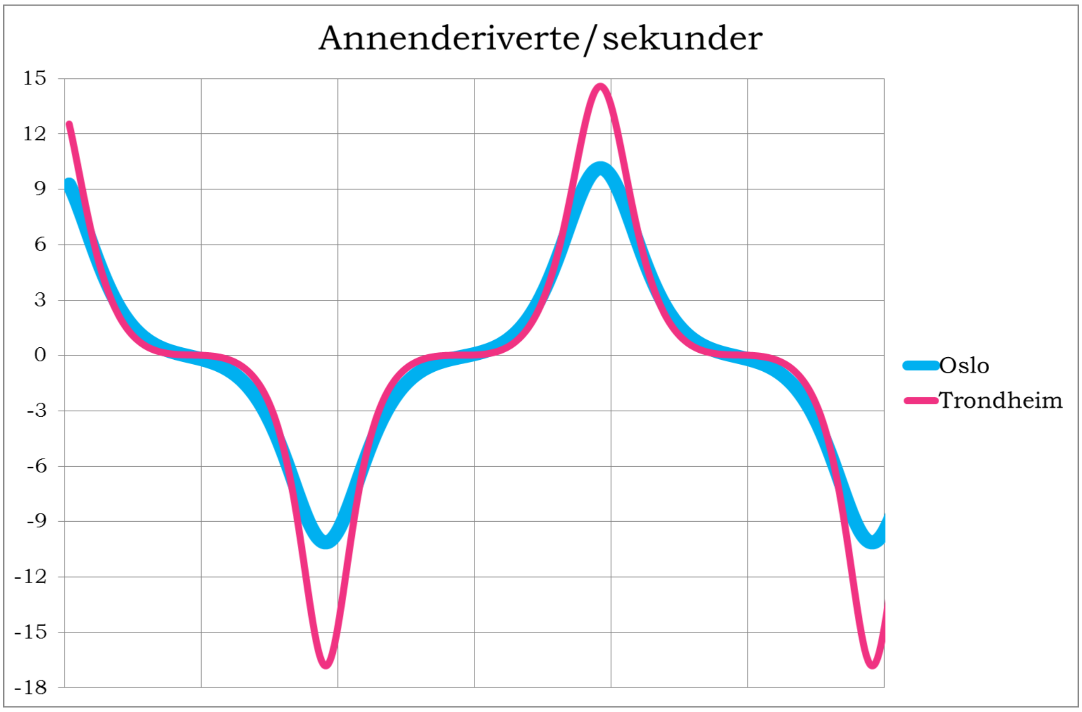
Daglengden er beregnet for Oslo og Trondheim med formelen 2acos(-tan(B)tan(δ)) der B er breddegraden og δ er deklinasjonen. Men for å få mer naturtro kurver har jeg tuklet litt med den δ som står i almanakken.



Tidsaksen er fra årsskiftet og 18 måneder fram i tid. Kurvene er ikke sinus-kurver. De er mer som avrundede trekantkurver, særlig for Trondheim.

Kurveformens avvik fra en sinuskurve kommer enda tydeligere fram når daglengden deriveres et par ganger. De rette delene av kurvene får da konstant førstederiverte og annerderiverte nær null. Førstederiverte angir endringen i daglengde fra en dag til den neste. Annenderiverte angir endring i førstederiverte.





De siste to ukene før vårjevndøgn er annenderiverte i Oslo nær null, slik at dagene ikke lenger blir lengre fortere. Og det er verre i Trondheim. Der går annenderiverte til null allerede i midten av februar. Og disse trendene fortsetter slik at kurvene nærmer seg sinuskurver lenger sør og fjerner seg når vi nærmer oss polarsirkelen.

Nå vet jeg hva jeg har i vente neste vår, og det er jo en trøst at jeg ikke bor i Trondheim. Dersom jeg var fastlege, ville jeg anbefale annenderivertikere å flytte sørover.

Leksjon 8
Povel og planimeteret

På 60-tallet hadde vi en mattebok som heter *Erwin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics*. Den er ikke akkurat rikt illustrert, men på side 32 er det en tegning av et planimeter, et presisjonsinstrument til å måle et areal. Men det Kreyszig skriver om nøyaktigheten, mener jeg bestemt er gyldig for mange andre måleinstrumenter også. *The accuracy can be increased by repeating this procedure m times, adding the m results, and dividing their sum by m.*

Neste gang jeg støtte på planimeteret var på slutten av 70-tallet i et fraflyttet, men velutstyrt, legekontor på det gamle Rikshospitalet. Jeg var der som medlem av Rikshospitalets kassasjonskomité. Vi hadde som oppgave å vurdere gammelt teknisk utstyr med henblikk på skroting, gjenbruk eller museum. Og vi skulle, i henhold til statens regelverk, komme fram til en kjennelse.

Hvordan sortering kan foregå i praksis har Povel Ramel detaljert beskrevet i diktet om Karl Nilsson. Her sorterer han trevirke.

En del hade kantfnas, de la jag på sitt håll. En del hade böjt sig, de lade jag för sig.
En del var angripna av blåhjon och nattsmyg. De la jag åt sidan i en särskild hög för sig.
En del hade krympt, de lade jag för sig. En del var prima virke, de lade jag för mig.

Jeg har faktisk brukt planimeteret mitt en god del. Det er fornøyelig å se hvordan ett hjul ruller fram og tilbake mens det sklir sidelengs samtidig som integralet oppdateres på en skala på et annet hjul. De av oss som aldri helt fikk taket på hvorfor eller hvordan Greens teorem virker, syntes jo likevel det var snedig at linjeintegralet langs omkretsen av et område gir arealet.

$$A = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)$$

Han må ha skjønt noe, han som brukte denne formelen til å finne opp planimeteret.

Kreyszig har også en tegning av et annet måleinstrument på side 465, omtrent midt i boka . Det kalles *harmonic analyzer* og brukes til å bestemme fourierkoeffisienter. Kreyszig forklarer hvordan det er konstruert: *... a harmonic analyzer which consists of a planimeter and an additional equipment.* Heftig og imponerende! Rett og slett *advanced engineering mathematics*.

Leksjon 9
Palliativ størrelsesorden i tunneler

Fysikk i tunnel er behandlet i leksjon 1. Her handler det om andre tunneler og ren matematikk kombinert med litt psykologi.

Ikke langt fra der jeg bor er det en 30 m lang gangtunnel, ═══. Tunneler kan være skumle, men denne går jeg gjennom av og til. Når jeg er kommet midt i tunnelen, vet jeg at halve veien uten dagslys er unnagjort, og det gir en bra følelse. Men jeg trenger en oppmuntring før jeg kommer halvveis også. Den får jeg når jeg har gått så langt at tilbakelagt strekning er av samme størrelsesorden som resterende strekning. Dette er ikke avmerket på noe vis i tunnelen, så jeg må til med litt hoderegning. Siden 10 er én størrelsesorden over 1, tenker jeg at grensen mellom størrelsesorden 1 og størrelsesorden10 går ved $\sqrt{10}$. Da finner jeg x, hvor langt inne i tunnelen grensen går, fra

$$x = \frac{30\,m}{1+\sqrt{10}} = 7{,}208\,m \approx 7\,m$$

Fordi 30 m er angitt med bare ett gjeldende siffer, er svaret 7 m. Da får jeg de tre små kikkene jeg trenger etter 7, 15 og 23 m. For så å kunne puste lettet ut, og ikke minst inn, etter 30 m når jeg atter er ute i friluft.

Prinsippet ovenfor gjelder for tunneler generelt. Lærdalstunnelen på 24509 m er et glimrende eksempel. Her siterer jeg i fleng (ordrett!) fra Wikipedia.

> *Utformingen av tunnelen tar hensyn til psykiske belastningen … og er designet med tre separate og opplyste haller som bilistene kjører gjennom 6 kms intervaller.*
> *…*
> *Grottene skal gi en følelse av å være ute i dagslys*
> *…*
> *Hulene er 30 meter i diameter.*

Det er et pussig sammentreff at hulene er 30 meter i diameter, altså av omtrent samme størrelse som lengden på gangtunnelen. Jeg ser for meg gangtunnelen på tvers i en hule.

De i Wikipedia sikter vel til de opplyste hallene når de etterpå skriver grottene og hulene; det er ikke snakk om ulike typer kaviteter som bilistene kjører gjennom. Det er tre slike haller/grotter/huler totalt. Den ene er plassert midt i tunnelen slik at man får godfølelsen av å være halvveis. De to andre ligger 6 km fra hver ende.

Wikipedia nevner ikke størrelsesorden. Formelen ovenfor gir imidlertid

$$x = \frac{24509\,m}{1+\sqrt{10}} = 5888\,m \approx 6\,km$$

De tenkte størrelsesorden de som planla Lærdalstunnelen.

Og jeg nynner med når Ulf Lundell synger *Jag trivs bäst i öppna landskap.*